THEORIE DER GEDÄMPFTEN SCHWINGUNGEN

INAUGURAL-DISSERTATION

DER MATHEMATISCHEN UND NATURWISSENSCHAFTLICHEN FAKULTÄT
DER KAISER-WILHELMS-UNIVERSITÄT
ZU STRASSBURG
ZUR ERLANGUNG DER DOKTORWÜRDE

VORGELEGT VON

OSKAR FABER
IN STRASSBURG (ELSASS)

ACAD.
UGD. BAT.
BIBL.

DRUCK VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG 1914

REFERENT: Prof. v. MISES

MEINEN LIEBEN ELTERN

AM 28. JULI 1913

Inhaltsverzeichnis.

Seite

Einleitung 1

I. Integration der Differentialgleichung (I) 3

1. Zurückführung des Randwertproblems auf ein Anfangswertproblem . 3

2. Formale Lösung des Anfangswertproblems (1), (2) 4

3. Konvergenz der Reihe (3) 6

II. Untersuchung der Eigenwerte und Eigenfunktionen 7

4. Eingrenzung der Eigenwerte 7

5. Die asymptotische Darstellung der Funktion $u(\lambda; 0, x)$ 10

6. Das asymptotische Verteilungsgesetz der Eigenwerte 14

III. Das Problem der Entwickelbarkeit willkürlicher Funktionen nach den Eigenfunktionen 15

7. Das Problem der erzwungenen Schwingungen 15

8. Das asymptotische Verhalten der Funktion $v(\lambda; x, t)$ 19

9. Die Partialbruchzerlegung der Funktion $v(\lambda; x, t)$. 23

10. Die Entwicklung willkürlicher Funktionen nach den Eigenfunktionen 24

Einleitung.

Die allgemeine Lehre von den harmonischen Schwingungen hat in neuerer Zeit durch die Entwickelung der Theorie der Integralgleichungen von der Form

$$y(x) = \lambda \int_0^1 K(x, t) y(t) dt$$

eine wesentliche Förderung erfahren. Für alle Arten von mechanischen, elektrischen, thermischen Schwingungsvorgängen kann man heute in einheitlicher Weise sowohl die Existenz von unendlich vielen Eigenschwingungen (Schwingungszahlen und Schwingungsformen) als auch die Realisierbarkeit beliebiger Anfangsbedingungen (Entwickelbarkeit willkürlicher Funktionen nach den Eigenfunktionen) nachweisen.

Die vorliegende Arbeit stellt sich die Aufgabe, dieselben Probleme für den Fall der gedämpften Schwingungen zu behandeln. Würde man wie bei den harmonischen Schwingungen das Problem auf die Lösung einer Integralgleichung zurückführen, so erhielte man eine Gleichung von der Form:

$$y(x) = \lambda^2 \int_0^1 K_1(x, t) y(t) dt + \lambda \int_0^1 K_2(x, t) y(t) dt,$$

wo also der Parameter λ nicht in der gewöhnlichen einfachen Form auftritt. Aus diesem Grunde soll hier auf die Verwendung der Integralgleichung verzichtet werden. Die Lösung des Problems wird vielmehr auf einem direkten Weg in Angriff genommen.

Die hier vorzunehmende Untersuchung soll von einer linearen partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung von der Form:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{c(x)} \frac{\partial i(x, t)}{\partial x}\right] = L(x) \cdot \frac{\partial^2 i(x, t)}{\partial t^2} + w(x) \cdot \frac{\partial i(x, t)}{\partial t}$$

ausgehen. Auf diese Differentialgleichung führt zum Beispiel die mathematische Behandlung der elektrischen Ausgleichsvorgänge in einem Kabel, wenn x die Kabellänge bis zu dem betrachteten Punkt, t die Zeit, $i(x, t)$ die Stromstärke, $c(x)$ die Kapazität, $L(x)$ die Selbstinduktion und $w(x)$

den Ohmschen Widerstand bedeuten.[1]) Neben der Differentialgleichung sind noch bestimmte Rand- und Anfangsbedingungen gegeben. Der Einfachheit halber seien sie in der folgenden Form vorausgesetzt:

$$i(x, 0) = F(x), \quad i(0, t) = 0, \quad i(1, t) = 0.$$

Für das erwähnte Beispiel würde das bedeuten, daß die Kabellänge gleich Eins gesetzt ist. Das Intervall (0, 1), innerhalb dessen die Funktionen zu definieren sind, sei immer bezeichnet als das Grundintervall.

Durch den Ansatz

$$i(x, t) = e^{\lambda t} y(x)$$

erhält man für $y(x)$ die gewöhnliche lineare homogene Differentialgleichung:

(I) $$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{c(x)} \cdot \frac{dy}{dx}\right] = [\lambda^2 \cdot L(x) + \lambda \cdot w(x)] \cdot y(x)$$

mit den Randbedingungen

(II) $$y(0) = 0, \qquad y(1) = 0.$$

Auf dasselbe Randwertproblem führt die Betrachtung der schwingenden gespannten Saite, wenn $\frac{1}{c(x)}$ die Spannung, $L(x)$ die Masse pro Längeneinheit und $w(x)$ den Dämpfungsfaktor bedeuten. Jeder Wert des Parameters λ, für den das Randwertproblem lösbar ist, heißt ein Eigenwert, die zu ihm gehörige Lösung eine Eigenfunktion.

Zur Lösung unseres Problems ist bisher nur ein Schritt unternommen worden, indem Birkhoff[2]) für große Werte des Parameters λ eine approximative Lösung gegeben hat.

Die zur Integration der Gleichung (I) angewandte Methode gründet sich auf eine Abhandlung von v. Mises.[3]) Im ersten Abschnitt wird zunächst das Randwertproblem (I, II) auf ein Anfangswertproblem zurückgeführt, dessen formale Lösung in Form einer Potenzreihe nach dem Parameter λ durch bloße Quadraturen gefunden werden kann. Daran anschließend wird der Konvergenzbeweis für diese Potenzreihe geführt. Im zweiten Abschnitt wird der Zusammenhang mit dem Problem (I, II) wieder hergestellt und eine transzendente Gleichung abgeleitet, deren Wurzeln die Eigenwerte sind. Im Anschluß an die oben erwähnte Abhandlung von Birkhoff wird dann für große Absolutwerte des Para-

1) Vgl. Riemann-Weber, Partielle Differentialgleichungen der math. Physik, II, § 132 (5. Aufl.). Vgl. auch K. W. Wagner, Elektromagnetische Ausgleichsvorgänge in Freileitungen und Kabeln. Leipzig 1908, B. G. Teubner.

2) Transactions of the Amer. Math. Soc. 9, 219 ff., 1908. Birkhoff behandelt eine Differentialgleichung n^{ter} Ordnung mit allgemeinerem Vorkommen des Parameters λ.

3) v. Mises, Beitrag zum Oszillationsproblem, Weber-Festschrift, p. 252 ff.

meters λ eine „asymptotische" Lösung von (I) in Form einer Exponentialfunktion direkt aufgestellt. Das asymptotische Verteilungsgesetz der Eigenwerte, sowie auch deren Existenz sind dann in einfacher Weise abzuleiten. Im dritten Abschnitt wird das fundamentale Problem der Entwickelbarkeit zweimal differenzierbarer Funktionen nach den Eigenfunktionen in Angriff genommen. Zunächst wird die Greensche Funktion des Differentialausdrucks

$$D(y) = \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{c(x)} \cdot \frac{dy}{dx}\right] - [\lambda^2 L(x) + \lambda w(x)] \cdot y(x)$$

mit Hilfe einer Methode gebildet, die von der gewöhnlich angewandten verschieden ist.[1]) Das Entwickelungsproblem wird im Anschluß an die Untersuchung der für große Absolutwerte des Parameters λ gebildeten Greenschen Funktion gelöst mit Hilfe einer in letzter Zeit vielfach angewandten Methode von Poincaré[2]), die sich auf den Residuensatz von Cauchy stützt. Hilb[3]) hat diese Methode angewandt auf den Fall konstanter Selbstinduktion $L(x)$ und verschwindender Dämpfungsfunktion $w(x)$. Haupt[4]) hat mit ihrer Hilfe die Entwickelung einer zweimal differenzierbaren Funktion nach den Eigenfunktionen des Turbulenzproblems[5]) aufgestellt. Schließlich haben Birkhoff[6]) und Tamarkine[7]) dieselbe Methode auf die Differentialgleichung n^{ter} Ordnung mit einem auch nur in der ersten Potenz vorkommenden Parameter angewandt im Anschluß an die oben zitierte Abhandlung von Birkhoff.[8])

I. Integration der Differentialgleichung (I).

1. Zurückführung des Randwertproblems auf ein Anfangswertproblem. Vorgelegt sei die Differentialgleichung

$$\text{(I)} \qquad \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{c(x)}\frac{dy}{dx}\right] - [\lambda^2 L(x) + \lambda w(x)]\, y(x) = 0$$

1) In der hier gebrauchten Form rührt die Methode her aus einer von Herrn v. Mises im Sommersemester 1911 gehaltenen Vorlesung über die Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik. Vgl. auch Sommerfeld, Die Greensche Funktion der Schwingungsgleichung, Jahresber. d. deutsch. Math.-Ver. 21, p. 309 ff.

2) Rendiconti del Circolo Mat. di Pal. VIII, p. 57 ff.

3) Math. Annalen 71, p. 76 ff. Sein Problem ist nur insofern allgemeiner, als in der Differentialgleichung, von der er ausgeht, als Faktor von $y(x)$ noch eine von λ unabhängige Funktion steht. Die auftretenden Funktionen sind außerdem als komplex angenommen.

4) Sitzungsber. d. bayr. Akad. in München, math.-phys. Klasse 1912, Heft 2.

5) Vgl. v. Mises, a. a. O. und Jahresber. d. deutsch. Math.-Ver. 21, p. 241 ff.

6) Transactions of the Amer. Math. Soc. **9**, 373 ff., 1908.

7) Rendiconti del Circolo Mat. di Pal. **34**, 345 ff.

8) Transactions of the Amer. Math. Soc. **9**, 219 ff., 1908.

mit den Randbedingungen

$$\text{(II)} \qquad y(0) = 0, \qquad y(1) = 0.$$

Über die Natur der bekannten Funktionen $L(x)$, $c(x)$ und $w(x)$ seien folgende Voraussetzungen gemacht, die sich im Laufe der Untersuchung als wesentlich erweisen werden:

$$\text{(III)} \quad \begin{cases} 0 < L(x) < \mu \\ 0 < c(x) < \sigma \\ w(x) \gtreqless 0, \quad |w(x)| < \nu \\ L(x) \text{ und } c(x) \text{ zweimal, } w(x) \text{ einmal differenzierbar.} \\ \text{Alle drei Funktionen sind reell.} \end{cases}$$

Hierin sind μ, ν und σ endliche Größen.

Dann definiert man eine Funktion $u(\lambda; s, x)$ folgendermaßen: $u(\lambda; s, x)$ genügt der Differentialgleichung:

$$\text{(1)} \qquad \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{c(x)}\frac{du(\lambda; s, x)}{dx}\right] - [\lambda^2 \cdot L(x) + \lambda \cdot w(x)]\, u(\lambda; s, x) = 0$$

und erfüllt die beiden Bedingungen:

$$\text{(2)} \qquad u(\lambda; s, s) = 0, \quad \left[\frac{du(\lambda; s, x)}{dx}\right]_{x=s} = c(s).$$

Es wird später gezeigt werden, daß die so definierte Funktion $u(\lambda; s, x)$ unter gewissen Umständen eine Lösung des Randwertproblems (I, II) ist.

2. Formale Lösung des Anfangswertproblems (1), (2). Wegen der Abhängigkeit der Funktion $u(\lambda; s, x)$ von dem Parameter λ versucht man, das Problem (1), (2) durch eine Potenzreihe nach λ zu lösen, und setzt rein formal an:

$$\text{(3)} \qquad u(\lambda; s, x) = k_0(s, x) + k_1(s, x) \cdot \lambda + k_2(s, x) \cdot \lambda^2 + \cdots$$

Unter der vorläufigen Annahme, daß die Reihe (3) selbst und ihre beiden ersten Ableitungen nach x konvergieren, erhält man durch gliedweise Differentiation unter Berücksichtigung der Differentialgleichung (1) für die Koeffizienten $k_n(s, x)$ die Rekursionsformeln:

$$\text{(4')} \quad \begin{cases} \dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{1}{c(x)} \cdot \dfrac{dk_0}{dx}\right] = 0 \\ \dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{1}{c(x)} \cdot \dfrac{dk_1}{dx}\right] = k_0(s, x) \cdot w(x) \\ \dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{1}{c(x)} \cdot \dfrac{dk_2}{dx}\right] = k_0(s, x) \cdot L(x) + k_1(s, x) \cdot w(x) \end{cases}$$

und allgemein:

$$\text{(4)} \qquad \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{c(x)}\frac{dk_{n+1}}{dx}\right] = k_{n-1}(s, x) \cdot L(x) + k_n(s, x) \cdot w(x).$$

Man verifiziert unter Berücksichtigung der Formeln (4′) leicht, daß man die Rekursionsformel (4) ersetzen kann durch:

$$(5)\qquad k_{n+1}(s,x)=\int_s^x k_{n-1}(s,t)k_0(t,x)L(t)\,dt+\int_s^x k_n(s,t)k_0(t,x)w(t)\,dt;$$

denn durch Differentiation von (5) folgt:

$$(6)\qquad \frac{dk_{n+1}(s,x)}{dx}=\int_s^x k_{n-1}(s,t)\frac{dk_0(t,x)}{dx}L(t)\,dt+\int_s^x k_n(s,t)\frac{dk_0(t,x)}{dx}w(t)\,dt$$

$$(6')\qquad \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{c(x)}\frac{dk_{n+1}}{dx}\right]=k_{n-1}(s,x)L(x)+k_n(s,x)\cdot w(x).$$

Aus der Formel (5) ergibt sich der Wert des Koeffizienten $k_{n+1}(s,x)$ direkt aus $k_0(s,x)$ durch die beiden Formeln:

$$(7)\quad\begin{cases} k_{2h}(s,x)=\int_s^{x_2}\int_{x_1}^{x_3}\cdots\int_{x_{h-1}}^{x} L(x_1)\,.\,L(x_2)\ldots L(x_h)\cdot k_0(s,x_1)\,.\,k_0(x_1,x_2)\ldots \\ \qquad\qquad k_0(x_h,x)\,.\,dx_1\ldots dx_h \\ +\int_s^{x_2}\cdots\int_{x_h}^{x}[L(x_1)\ldots L(x_{h-1})\,.\,w(x_h)\,.\,w(x_{h+1})+\cdots]\cdot \\ \qquad\qquad k_0(s,x_1)\ldots k_0(x_{h+1},x)\,.\,dx_1\ldots dx_{h+1} \\ +\ . \\ +\int_s^{x_2}\cdots\int_{x_{2h-1}}^{x} w(x_1)\ldots w(x_{2h})\,.\,k_0(s,x_1)\ldots k_0(x_{2h},x)\,. \\ \qquad\qquad dx_1\ldots dx_{2h}. \end{cases}$$

$$(7')\quad\begin{cases} k_{2h-1}(s,x)=\int_s^{x_2}\cdots\int_{x_{h-1}}^{x}[L(x_1)\cdots L(x_{h-1}\cdot w(x_h)+\cdots]k_0(s,x_1)\cdots \\ \qquad\qquad k_0(x_h,x)\cdot dx_1\cdots dx_h \\ +\int_s^{x_2}\cdots\int_{x_h}^{x}[L(x_1)\cdots L(x_{h-2})\cdot w(x_{h-1})\cdot w(x_h)\cdot w(x_{h+1})+\cdots] \\ \qquad\qquad \cdot k_0(s,x_1)\cdots k_0(x_{h+1},x)\cdot dx_1\cdots dx_{h+1} \\ +\ . \\ +\int_s^{x_2}\cdots\int_{x_{2h-2}}^{x} w(x_1)\cdots w(x_{2h-1})\cdot k_0(s,x_1)\cdots k_0(x_{2h-1},x)\cdot \\ \qquad\qquad dx_1\cdots dx_{2h-1}. \end{cases}$$

Das erste Integralzeichen bezieht sich immer auf die erste Integrationsvariable usw. In den Summenausdrücken innerhalb der eckigen Klammern entstehen die weiteren Glieder aus dem ersten dadurch, daß die Argumente der w mit den Argumenten der L vertauscht werden; niemals aber werden bloß die Argumente der L oder der w untereinander vertauscht. Ist weiter in irgendeinem Glied jener Summenausdrücke n_L die Anzahl der vorkommenden Faktoren L, n_w die der Faktoren w,

so ist in jedem Summenausdruck zwischen n_L und n_w die Beziehung erfüllt:

$$2n_L + n_w = n,$$

wo n den Index des Koeffizienten $k_n(s, x)$ bedeutet. Auf Grund der Lehre von den Kombinationen beträgt ferner bei k_{2h} die Gliederzahl des ersten Integrals 1, des zweiten $\frac{(h+1)!}{2!(h-1)!}$, des dritten $\frac{(h+2)!}{4!(h-2)!}$ etc. Allgemein ist die Gliederzahl bei dem $\varkappa^{\text{ten}}$ Integral gleich $\frac{(h+\varkappa-1)!}{(2\varkappa-2)!(h-\varkappa+1)!}$. Analog ist bei k_{2h-1} die Summandenzahl des ersten Integrals $\frac{h!}{(h-1)!}$, des zweiten $\frac{(h+1)!}{3!(h-2)!}$ etc. Allgemein ist bei dem $\varkappa^{\text{ten}}$ Integral die Gliederzahl der Klammersumme gleich $\frac{(h+\varkappa-1)!}{(2\varkappa-1)!(h-\varkappa)!}$.

3. Konvergenz der Reihe (3). Unter Berücksichtigung der Bedingungen (III) ergibt sich zunächst aus der Formel (4′):

$$|k_0(s, x)| < \sigma \cdot |x - s|.$$

Es ist weiter

$$|k_0(s, x_1) \cdot k_0(x_1, x_2) \dots k_0(x_h, x)| < \frac{\sigma^{h+1} \cdot |x-s|^{h+1}}{(h+1)^{h+1}}.$$

Schließlich ist das Integral

$$\int_s^{x_2}\int_{x_1}^{x_3} \cdots \int_{x_{h-1}}^{x} dx_1 \cdot dx_2 \cdots dx_h = \frac{(x-s)^h}{h!}.$$

Da später dem Parameter s die Werte Null oder Eins beigelegt werden und die Variable x das Grundintervall durchläuft, so ist

$$|x - s| \leqq 1,$$

und es folgt aus (7) und (III):

$$|k_{2h}(s, x)| < \mu^h \cdot \frac{\sigma^{h+1}}{(h+1)^{h+1}} \cdot \frac{1}{h!} + \frac{(h+1)!}{2!(h-1)!} \cdot \mu^{h-1} \cdot \nu^2 \frac{\sigma^{h+2}}{(h+2)^{h+2}} \cdot \frac{1}{(h+1)!}$$
$$+ \cdots + \nu^{2h} \cdot \frac{\sigma^{2h+1}}{(2h+1)^{2h+1}} \cdot \frac{1}{(2h)!}.$$

Werden μ, ν und σ größer als 1 angenommen, was ja jedenfalls zulässig ist, so setze man zunächst in allen Gliedern mit Ausnahme des letzten den Faktor $\mu \cdot \nu \cdot \sigma = \omega$ in der höchsten, in diesen Gliedern vorkommenden Potenz $2h$. Dann kann man schreiben:

$$|k_{2h}(s, x)| < \omega^{2h}\left[\frac{1}{h!(h+1)^{h+1}} + \cdots + \frac{1}{(2h-2)!(2h)^{2h}}\right]$$
$$+ \frac{\nu^{2h+1}}{(2h+1)^{2h+1}} \cdot \frac{1}{(2h)!}.$$

In der Klammer stehen h Summanden, von denen der erste der größte ist, also:

$$|k_{2h}| < \omega^{2h} \cdot \frac{h}{h!(h+1)^{h+1}} + \frac{v^{2h+1}}{(2h+1)^{2h+1}} \cdot \frac{1}{(2h)!}$$

oder nach einfacher Umformung:

$$|k_{2h}| < \frac{\omega^{h-1}}{(h-1)!} \cdot \frac{\omega^{h+1}}{(h+1)^{h+1}} + \frac{v^{2h+1}}{(2h+1)^{2h+1}} \cdot \frac{1}{(2h)!}. \tag{8}$$

Ebenso verfährt man für $k_{2h-1}(s, x)$ und erhält schließlich die Formel:

$$|k_{2h-1}| < \frac{\omega^{h-2}}{(h-2)!} \cdot \frac{\omega^{h+1}}{(h+1)^{h+1}} + \frac{v^{2h}}{(2h)^{2h}} \cdot \frac{1}{(2h-1)!}. \tag{8'}$$

Aus den Ungleichungen (8) und (8′) ergibt sich bei Bestehen der Bedingungen (III) somit die gleichmäßige Konvergenz der Reihe (3) für alle Werte x des Grundintervalls und alle Werte des Parameters λ, die, absolut genommen, unter einer beliebig hohen Grenze liegen. In genau derselben Weise erkennt man mit Hilfe von (6) und (6′) die gleichmäßige Konvergenz der durch gliedweise Differentiation von (3) erhaltenen Ableitungen von $u(\lambda; s, x)$. Daraus ergibt sich die Tatsache, daß die Reihe (3) mit den durch (5) gegebenen Koeffizienten die verlangte Lösung des Anfangswertproblems (1), (2) ist.

II. Untersuchung der Eigenwerte und Eigenfunktionen.

4. Eingrenzung der Eigenwerte. Gibt man in der Funktion $u(\lambda; s, x)$ dem Parameter s den Wert Null, so erhält man eine Funktion $u(\lambda; 0, x)$, die im Punkte $x = 0$ verschwindet. Sie verschwindet in dem Punkte $x = 1$ dann und nur dann, wenn λ der transzendenten Gleichung genügt:

$$u(\lambda; 0, 1) = 0 = k_0(0, 1) + k_1(0, 1)\lambda + k_2(0, 1)\lambda^2 + \cdots, \tag{9}$$

deren Wurzeln λ_i man als Eigenwerte des Randwertproblems (I, II) bezeichnet. Die zu λ_i gehörige Funktion $u(\lambda_i; 0, x)$ (falls es nur eine einzige gibt) ist dann eine Eigenfunktion desselben Problems.

Es wird jetzt vorläufig die Annahme gemacht, daß überhaupt Eigenwerte, also endliche Wurzeln der Gleichung (9) existieren. Dann kann man über ihre Lage unter alleiniger Benutzung der Gleichungen (I) und (II) bestimmte Angaben machen.

Zunächst wird (mit Hilfe der bekannten Methode von Sturm) der Nachweis geführt, daß es nur einfache Eigenwerte geben kann. Ein doppelter (resp. n-facher) Eigenwert von (I, II) ist bekanntlich dadurch charakterisiert, daß zu ihm zwei (resp. n) linear unabhängige Eigen-

funktionen y_1 und y_2 (resp. bis y_n) gehören.[1]) Da (I) eine Differentialgleichung zweiter Ordnung ist, so folgt zunächst, daß es höchstens zwei linear unabhängige Eigenfunktionen y_1 und y_2 zu demselben Eigenwert geben kann. Daß aber auch dies unmöglich ist, folgt aus dem Bestehen der Randbedingungen (II) für y_1 und y_2. Es genügen nämlich y_1 und y_2 (zu λ_i gehörig) den beiden Differentialgleichungen:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{c}\cdot y_1'\right) - [\lambda_i^2 \cdot L + \lambda_i \cdot w]\cdot y_1 = 0,$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{c}\cdot y_2'\right) - [\lambda_i^2 \cdot L + \lambda_i \cdot w]\cdot y_2 = 0,$$

wo die Striche die Ableitung nach x bedeuten. Multipliziert man die erste Gleichung mit y_2, die zweite mit y_1 und subtrahiert, so folgt:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{c(x)}(y_2\cdot y_1' - y_1\cdot y_2')\right] = 0,$$

also für jeden Punkt des Grundintervalls:

$$\frac{1}{c(x)}\cdot(y_2\cdot y_1' - y_1\cdot y_2') = \text{const.},$$

und zwar von Null verschieden, wegen der linearen Unabhängigkeit von y_1 und y_2. An der Stelle $x=0$ verschwindet aber wegen (II) der Klammerausdruck auf der linken Seite. Damit ist die Einfachheit sämtlicher Eigenwerte nachgewiesen.

Diese selbst werden im allgemeinen komplex sein, und man setzt ein für allemal:

$$\lambda_k = \alpha + i\beta, \quad u(\lambda_k; 0, x) = \varphi + i\cdot\psi, \tag{10}$$

wo α und β reelle Konstanten, φ und ψ reelle Funktionen von x sind. Aus der Gleichung (I) mit den Randbedingungen (II) ergeben sich dann die beiden simultanen Differentialgleichungen:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{c}\frac{d\varphi}{dx}\right) + [(\beta^2-\alpha^2)L - \alpha\cdot w]\cdot\varphi = -\beta(2L\alpha + w)\cdot\psi \tag{11}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{c}\frac{d\psi}{dx}\right) + [(\beta^2-\alpha^2)L - \alpha\cdot w]\cdot\psi = \beta(2L\alpha + w)\cdot\varphi \tag{12}$$

mit den Randbedingungen:

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi(1) = 0, \quad \psi(0) = 0, \quad \psi(1) = 0. \tag{13}$$

Nach Multiplikation der ersten Gleichung mit ψ, der zweiten mit φ, folgt durch Subtraktion:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{c(x)}\left(\psi\cdot\frac{d\varphi}{dx} - \varphi\cdot\frac{d\psi}{dx}\right)\right] = -\beta(2L\alpha + w)\cdot(\varphi^2+\psi^2)$$

1) Vgl. Birkhoff, Transactions of the Am. Math. Soc. **10**, 261, 1909.

und hieraus durch Integration:

$$\left|\frac{1}{c(x)}\left(\psi\cdot\frac{d\varphi}{dx}-\varphi\cdot\frac{d\psi}{dx}\right)\right|_0^1=-\beta\int_0^1(2L\alpha+w)(\varphi^2+\psi^2)\,dx.$$

Wegen (13) verschwindet die linke Seite der letzten Gleichung, und unter der Annahme, daß λ komplex, also β von Null verschieden sei, folgert man:

$$\int_0^1[2L(x)\cdot\alpha+w(x)](\varphi^2+\psi^2)\,dx=0. \tag{14}$$

Es muß also der Integrand innerhalb des Grundintervalls sein Zeichen wechseln. Es liegt nun in der Natur des behandelten Problems der elektrischen Schwingungen, daß die Funktion $w(x)$ nicht negativ wird. Es sei dies deshalb in der Folge stets vorausgesetzt. Dann läßt sich die Bedingung (14) auch in einer anschaulicheren Form aussprechen. Ist nämlich G der größte Wert des Quotienten $w(x)/2\cdot L(x)$, g der kleinste, so folgt aus (14) für α die Ungleichung:

$$-G<\alpha<-g.^1) \tag{15}$$

Komplexe Eigenwerte liegen demnach in der λ-Ebene im Gebiet der Punkte mit negativ reellem Bestandteil, und zwar liegen sie innerhalb eines Streifens, der begrenzt ist von zwei Parallelen zur imaginären Achse in den Abständen G und g.

Setzt man, um die Bedingung eines nicht verschwindenden Wertes von β fallen lassen zu können, für dieses den Wert Null ein, so verschwindet in den Gleichungen (11) und (12) die rechte Seite, und die Funktion $\varphi(x)$ genügt infolgedessen der Differentialgleichung:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{c}\frac{d\varphi}{dx}\right)-(\alpha^2\cdot L+\alpha\cdot w)\varphi=0 \tag{11'}$$

mit den Randbedingungen (13). Dasselbe gilt für die Funktion $\psi(x)$. Wegen der Annahme eines positiven Vorzeichens der Funktion $L(x)$ folgt für große Absolutwerte von α, daß der Ausdruck innerhalb der Klammer positiv wird; es brauchte $|\alpha|$ nur größer zu sein als der größte Wert des Quotienten $w(x)/L(x)$. Dann aber wäre die Differentialgleichung (11') nach bekannten Sätzen aperiodisch, das heißt, wenn eine Lösung überhaupt eine Nullstelle hat, so kann sie entweder nur in einem einzigen Punkt oder identisch verschwinden. Das würde sowohl für φ als auch für ψ gelten. Da man naturgemäß den trivialen

1) Analoges würde auch im allgemeinen Fall gelten, wo $w(x)$ keiner Vorzeichenbedingung unterworfen ist.

Fall einer identisch verschwindenden Eigenfunktion ausschließt, so kann α bei verschwindendem β den Wert $|w/L|_{\max}$ nicht übersteigen. Sämtliche Eigenwerte, deren absoluter Betrag diesen Maximalwert übersteigt, liegen also in dem oben erwähnten Streifen.

5. Die asymptotische Darstellung der Funktion $u(\lambda; 0, x)$. Die Untersuchung dieser Nummer soll zu dem Nachweis führen, daß unter gewissen Voraussetzungen über den Wert des Parameters λ die Differentialgleichung (1) mit den Anfangsbedingungen (2) für die Funktion $u(\lambda; 0, x)$ bis zur Ordnung $\frac{1}{\lambda}$ befriedigt wird durch den Ansatz:

$$U(\lambda; 0, x) = z_1 \cdot e^{\lambda \int_0^x \sqrt{L(t)\,c(t)}\cdot dt} + z_2 \cdot e^{-\lambda \int_0^x \sqrt{L(t)\,c(t)}\cdot dt}, \tag{16}$$

wo die Wurzel (wie alle weiter unten vorkommenden Wurzeln) positiv zu nehmen ist. Die Größen z_1 und z_2 sollen Funktionen von x und λ sein, die endlich bleiben, wenn $|\lambda|$ über alle Grenzen wächst. Zur Abkürzung setze man:

$$\begin{cases} Z_1(x) = e^{\lambda \int_0^x \sqrt{L(t)\,c(t)}\cdot dt} \\ Z_1^{-1}(x) = e^{-\lambda \int_0^x \sqrt{L(t)\,c(t)}\cdot dt} \end{cases} \tag{17}$$

und erhält durch Differentiation aus (16):

$$\frac{dU(\lambda; 0, x)}{dx} = \lambda \cdot \sqrt{L(x)\cdot c(x)}\cdot z_1 \cdot Z_1(x) + Z_1(x)\cdot z_1' - \lambda \cdot \sqrt{L(x)\cdot c(x)}\cdot z_2 \cdot Z_1^{-1}(x) + Z_1^{-1}(x)\cdot z_2',$$

wo die Striche die Ableitung nach x bedeuten.

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{c(x)}\cdot\frac{dU(\lambda; 0, x)}{dx}\right] = \lambda^2 \cdot L(x)[z_1 \cdot Z_1(x) + z_2 \cdot Z_1^{-1}(x)] + \lambda \cdot Z_1(x)\left[2z_1'\sqrt{\frac{L(x)}{c(x)}} + z_1\frac{d}{dx}\sqrt{\frac{L(x)}{c(x)}}\right] - \lambda \cdot Z_1^{-1}(x)\left[2z_2'\sqrt{\frac{L(x)}{c(x)}} + z_2\frac{d}{dx}\sqrt{\frac{L(x)}{c(x)}}\right] + Z_1(x)\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{c}\cdot z_1'\right) + Z_1^{-1}(x)\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{c}z_2'\right).$$

Man bilde jetzt den Ausdruck

$$D(U) \equiv \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{c(x)}\cdot\frac{dU}{dx}\right] - [\lambda^2 L(x) + \lambda w(x)]\,U$$

und erhält:

$$(18)\quad \begin{cases} D(U) = \lambda \cdot Z_1(x)\left[2z_1'\sqrt{\frac{L(x)}{c(x)}} + z_1\left(\frac{d}{dx}\sqrt{\frac{L(x)}{c(x)}} - w(x)\right)\right] \\ \qquad - \lambda \cdot Z_1^{-1}(x)\left[2z_2'\sqrt{\frac{L(x)}{c(x)}} + z_2\left(\frac{d}{dx}\sqrt{\frac{L(x)}{c(x)}} + w(x)\right)\right] \\ \qquad + Z_1(x)\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{c}z_1'\right) + Z_1^{-1}(x)\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{c}z_2'\right). \end{cases}$$

Die Funktionen z_1 und z_2 werden jetzt so bestimmt, daß die Koeffizienten der beiden ersten Glieder auf der rechten Seite von (18) verschwinden, indem man von vornherein darauf verzichtet, die beiden andern Glieder zum Verschwinden zu bringen. Was das für Folgen hat, wird bald gezeigt werden. Es soll also z_1 der Gleichung genügen:

$$(19)\quad 2\sqrt{\frac{L(x)}{c(x)}}\frac{dz_1}{dx} + \left[\frac{d}{dx}\sqrt{\frac{L(x)}{c(x)}} - w(x)\right]z_1 = 0,$$

deren Lösung gegeben ist durch

$$(20)\quad z_1 = m_1 \cdot \sqrt[4]{\frac{c(x)}{L(x)}} \cdot e^{\frac{1}{2}\int_a^x w(x)\sqrt{\frac{c(x)}{L(x)}}\,dx},$$

wo die Integrationsgrenze a und die von x (aber nicht von λ) unabhängige Konstante m_1 noch in geeigneter Weise bestimmt werden sollen. Ebenso genügt z_2 einer Gleichung:

$$(21)\quad 2\sqrt{\frac{L(x)}{c(x)}}\frac{dz_2}{dx} + \left[\frac{d}{dx}\sqrt{\frac{L(x)}{c(x)}} + w(x)\right]\cdot z_2 = 0,$$

und man erhält:

$$(22)\quad z_2 = m_2 \cdot \sqrt[4]{\frac{c(x)}{L(x)}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\int_a^x w(x)\sqrt{\frac{c(x)}{L(x)}}\,dx}.$$

Aus den Voraussetzungen (III) folgt, daß sowohl z_1 und z_2, als auch deren erste und zweite Ableitungen nach x, als Funktionen von x betrachtet, für das ganze Grundintervall endlich sind. Ihr Verhalten inbezug auf λ ist gegeben durch die Abhängigkeit der beiden Konstanten m_1 und m_2 von λ. Zur Bestimmung derselben, wie auch zur Festlegung der Integrationsgrenze a, dienen die Anfangsbedingungen (2), denen $U(\lambda; 0, x)$ ja auch genügen soll. Man erhält demnach die folgenden Bestimmungsgleichungen:

$$z_1(0) + z_2(0) = 0$$

$$\lambda \cdot z_1(0) + z_1'(0) - \lambda \cdot z_2(0) + z_2'(0) = c(0)$$

oder, wenn man die Werte aus (20) und (22) einsetzt, mit Berücksichtigung von (19) und (21):

$$m_1 \cdot e^{\frac{1}{2}\int_a^0 w(x)\sqrt{\frac{c(x)}{L(x)}}\,dx} + m_2 \cdot e^{-\frac{1}{2}\int_a^0 w(x)\sqrt{\frac{c(x)}{L(x)}}\,dx} = 0$$

$$\begin{cases} m_1 \cdot e^{\frac{1}{2}\int_a^0 w(x)\sqrt{\frac{c(x)}{L(x)}}\,dx} \cdot \left[\lambda + \dfrac{w(0) - \dfrac{d}{dx}\sqrt{\dfrac{L(0)}{c(0)}}}{2\sqrt{\dfrac{L(0)}{c(0)}}}\right] \\ - m_2 \cdot e^{-\frac{1}{2}\int_a^0 w(x)\sqrt{\frac{c(x)}{L(x)}}\,dx} \cdot \left[\lambda + \dfrac{w(0) + \dfrac{d}{dx}\sqrt{\dfrac{L(0)}{c(0)}}}{2\sqrt{\dfrac{L(0)}{c(0)}}}\right] = c(o)\sqrt[4]{\frac{L(0)}{c(0)}}. \end{cases}$$

Die Integrationsgrenze a bleibt also willkürlich, und man setzt sie deshalb passend gleich Null. Dann bleiben zur Bestimmung der Konstanten m_1 und m_2 bie beiden Gleichungen:

$$m_1 + m_2 = 0$$

$$m_1\left[\lambda + \frac{w(0) - \frac{d}{dx}\sqrt{\frac{L(0)}{c(0)}}}{2\sqrt{\frac{L(0)}{c(0)}}}\right] - m_2\left[\lambda + \frac{w(0) + \frac{d}{dx}\sqrt{\frac{L(0)}{c(0)}}}{2\sqrt{\frac{L(0)}{c(0)}}}\right] = c(o)\sqrt[4]{\frac{L(0)}{c(0)}},$$

woraus für m_1 und m_2 die Werte folgen:

$$m_1 = -m_2 = \frac{c(0)\sqrt[4]{\frac{L(0)}{c(0)}}}{2\lambda + w(0)\cdot\sqrt{\frac{c(0)}{L(0)}}}.$$

Für die Funktionen z_1 und z_2 erhält man also jetzt:

$$(23) \qquad z_1 = \frac{c(0)\sqrt[4]{\frac{L(0)}{L(x)}\cdot\frac{c(x)}{c(0)}}}{2\lambda + w(0)\cdot\sqrt{\frac{c(0)}{L(0)}}} \cdot e^{\frac{1}{2}\int_0^x w(t)\sqrt{\frac{c(t)}{L(t)}}\,dt}$$

$$(23') \qquad z_2 = -\frac{c(0)\sqrt[4]{\frac{L(0)}{L(x)}\cdot\frac{c(x)}{c(0)}}}{2\lambda + w(0)\cdot\sqrt{\frac{c(0)}{L(0)}}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\int_0^x w(t)\sqrt{\frac{c(t)}{L(t)}}\,dt}.$$

Bezeichnet E mit irgend einem Index eine überall endliche Funktion von x (einschließlich der Konstanten), die für große Werte von $|\lambda|$ end-

lich ist, so kann man demnach die Funktion $U(\lambda;\ 0,\ x)$ in der Form schreiben:

$$U(\lambda;\ 0,\ x) = \frac{E_1}{\lambda} \cdot [Z_2(x) - Z_2^{-1}(x)], \tag{24}$$

wenn zur Abkürzung gesetzt wurde:

$$Z_2(x) = Z_1(x) \cdot e^{\frac{1}{2}\int_0^x w(t) \cdot \sqrt{\frac{c(t)}{L(t)}}\, dt}, \quad Z_2^{-1}(x) = \frac{1}{Z_2(x)}. \tag{25}$$

In (24) ist E_1 gegeben durch den Ausdruck:

$$\frac{E_1}{\lambda} = \frac{c(0) \cdot \sqrt[4]{\frac{L(0)}{L(x)} \cdot \frac{c(x)}{c(0)}}}{2\lambda + w(0) \cdot \sqrt{\frac{c(0)}{L(0)}}}. \tag{24'}$$

Der Ausdruck (18) schreibt sich jetzt in der einfachen Form:

$$D(U) = Z_1(x) \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{c} \cdot z_1'\right) + Z_1^{-1}(x) \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{c} z_2'\right). \tag{18'}$$

Wegen (23), (23′) und (III) sind die Faktoren der beiden Exponentialfunktionen $Z_1(x)$ und $Z_2(x)$ in dem letzten Ausdruck, als Funktionen von x betrachtet, für alle x des Grundintervalls endlich, und man kann wegen (19) und (21) schreiben:

$$D(U) = \frac{E_2}{\lambda} \cdot Z_1(x) + \frac{E_3}{\lambda} Z_1^{-1}(x). \tag{18''}$$

Ist also der reelle Bestandteil α von λ endlich, so sind die beiden Exponentialfunktionen $Z_1(x)$ und $Z_1^{-1}(x)$ ebenfalls dem Absolutwert nach endlich, und es ist:

$$D(U) = \frac{E_4}{\lambda},$$

es stimmt also $U(\lambda;\ 0,\ x)$ asymptotisch mit $u(\lambda;\ 0,\ x)$ überein. Das Ergebnis läßt sich folgendermaßen genau formulieren:

Man kann zu jeder positiven Zahl E_5 zwei Zahlen A und B so finden, daß für alle Werte von λ, für die

$$|\alpha| < A, \quad |\beta| > B \tag{26}$$

ist, die durch (16) resp. (24) definierte Funktion $U(\lambda;\ 0,\ x)$ die Ungleichung erfüllt:

$$|U(\lambda;\ 0,\ x) - u(\lambda;\ 0,\ x)| < \frac{E_5}{|\lambda|}, \quad 0 \leqq x \leqq 1. \tag{27}$$

Aus diesem Satz folgt weiter unter Berücksichtigung der Ergebnisse von Nr. 4, daß eine Zahl M immer so gefunden werden kann, daß für alle Werte von λ, für die

$$|\lambda| > M \tag{28}$$

ist, bei vorgegebener Größe einer Zahl E_6 zwischen den Nullstellen $\lambda = \lambda_k'$ von $U(\lambda; 0, 1)$ und den Nullstellen $\lambda = \lambda_k$ von $u(\lambda; 0, 1)$ die Beziehung besteht:

$$|\lambda_k' - \lambda_k| < \frac{E_6}{|\lambda|}. \tag{27'}$$

Oder mit anderen Worten, die Nullstellen von $U(\lambda; 0, 1)$ sind asymptotisch die Eigenwerte des Randwertproblems (I, II).

6. Das asymptotische Verteilungsgesetz der Eigenwerte. — Mit Hilfe der Ergebnisse der letzten Nummer lassen sich jetzt sowohl die Existenz als auch das asymptotische Verteilungsgesetz der Eigenwerte des Problems (I, II) ableiten. Aus (24) folgt:

$$U(\lambda; 0, 1) = \frac{E_1'}{\lambda}[Z_2(1) - Z_2^{-1}(1)]. \tag{24''}$$

Setzt man das gleich Null, so erhält man für λ die Gleichung:

$$[Z_2(1)]^2 - 1 = 0,$$

also aus (25) und (17):

$$e^{2\int_0^1 \left[\frac{w(x)}{2}\sqrt{\frac{c(x)}{L(x)}} + \lambda\sqrt{L(x)\cdot c(x)}\right] dx} - 1 = 0,$$

woraus folgt:

$$2\int_0^1 \left[\frac{w(x)}{2}\sqrt{\frac{c(x)}{L(x)}} + \lambda\sqrt{L(x)\cdot c(x)}\right] dx = 2k\pi i.$$

Bezeichnet man die Wurzeln von $U(\lambda; 0, 1)$ mit

$$\lambda_k' = \alpha_k' + i\cdot\beta_k',$$

so ergeben sich die Formeln:

$$\alpha_k' = -\frac{\int_0^1 \frac{w(x)}{2}\sqrt{\frac{c(x)}{L(x)}}\,dx}{\int_0^1 \sqrt{L(x)\cdot c(x)}\,dx}, \qquad \beta_k' = \frac{k\pi}{\int_0^1 \sqrt{L(x)\cdot c(x)}\,dx}. \tag{29}$$

k durchläuft hierin die Reihe der ganzen Zahlen von $-\infty$ bis $+\infty$. Man bemerkt sofort, daß die erste der beiden Formeln (29) in bezug auf die Nullstellen $U(\lambda; 0, 1)$ dasselbe aussagt, was aus der Ungleichung (15) für die komplexen Nullstellen von $u(\lambda; 0, 1)$ folgt.

Das Ergebnis läßt sich in der folgenden Form genau aussprechen:

Zu zwei beliebig kleinen Größen $|\varepsilon$ und $|\eta$ kann man immer eine positive Zahl K so finden, daß sämtliche Eigenwerte $\lambda = \lambda_k = \alpha_k + i\beta_k$ des Problems (I, II), für die

$$|\lambda_k| > K \tag{28'}$$

ist, gegeben sind durch die beiden Formeln:

$$(30)\qquad \alpha_k = -\frac{\int_0^1 \frac{w(x)}{2}\sqrt{\frac{c(x)}{L(x)}}\,dx}{\int_0^1 \sqrt{L(x)\cdot c(x)}\,dx} + \varepsilon, \quad \beta_k = \frac{k\cdot\pi}{\int_0^1 \sqrt{L(x)\cdot c(x)}\,dx} + \eta.$$

Damit ist die wesentliche Aufgabe dieses Abschnitts gelöst. Es gibt unendlich viele Eigenwerte von (I, II), und sie sind sämtlich einfach.

III. Das Problem der Entwickelbarkeit willkürlicher Funktionen nach den Eigenfunktionen.

Das in diesem Abschnitt in Angriff zu nehmende Problem entsteht bekanntlich dadurch, daß die Stromstärke $i(x, t)$ im Anfang, also zur Zeit $t = 0$, gegeben sein sollte durch die Bedingung

$$i(x, 0) = F(x).$$

Bedenkt man, daß angesetzt worden war:

$$i(x, t) = e^{\lambda t}\cdot y(x);$$

so erhält man für $t = 0$:

$$i(x, 0) = F(x) = y(x).$$

Es ist nun $y(x)$ eine Lösung des Randwertproblems (I, II). Jede lineare Verbindung der Eigenfunktionen ist eine Lösung desselben Problems. Im allgemeinen ist also zu setzen:

$$y(x) = \sum_i k_i y_i(x)$$

mit konstanten Koeffizienten k_i, die Summe erstreckt über irgendwelche Eigenfunktionen $y_i(x)$ von (I, II). Soll demnach die Anfangsverteilung der Stromstärke beliebig gegeben sein, so müßte sich die willkürliche Funktion $F(x)$ in eine Reihe nach den Eigenfunktionen $y_i(x)$ entwickeln lassen. Es wird sich zeigen, daß die Bedingung der zweimaligen Differenzierbarkeit von $F(x)$ zur Bejahung der Frage nach der Entwickelbarkeit hinreichend ist.

7. Das Problem der erzwungenen Schwingungen. — Finden die Schwingungen unter dem Einfluß einer äußeren Kraft statt, die als eine periodische Funktion der Zeit bekannt ist, so tritt an die Stelle der in der Einleitung aufgestellten homogenen eine nichthomogene partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung von der Gestalt:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(c\,\frac{\partial i}{\partial x}\right) = L\cdot\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} + w\cdot\frac{\partial i}{\partial t} \mp e^{\lambda t}\cdot f(x),$$

wo $f(x)$ eine nur von x, nicht von t abhängige Funktion bedeutet. Durch den Ansatz:

$$i(x, t) = e^{\lambda t} \cdot y(x)$$

erhält man eine inhomogene gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung, der die Funktion $y(x)$ genügen muß:

$$\text{(IV)} \qquad \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{c(x)} \cdot \frac{dy}{dx}\right] = [L(x)\lambda^2 + w(x)\lambda]y(x) + f(x)$$

mit den Randbedingungen:

$$\text{(II)} \qquad y(0) = 0, \quad y(1) = 0.$$

Herr v. Mises hat nun in der eingangs erwähnten Vorlesung gezeigt, daß die Lösung der inhomogenen Differentialgleichung (IV) mit den Randbedingungen (II) zurückgeführt werden kann auf die Lösung der früher betrachteten Differentialgleichung (1).[1]) Zu diesem Zweck löst man das Problem (IV, II) zunächst für den Fall einer speziellen Wahl der Funktion $f(x)$. Man wählt nämlich $f(x)$ so, daß

$$\text{(31)} \qquad \int_0^1 f(x)dx = 1$$

ist. Dann läßt man die Funktion $f(x)$ unter ständiger Berücksichtigung von (31) so sich ändern, daß sie überall Null wird, mit Ausnahme des Punktes $x = t$, in dem sie schließlich so unendlich werden muß, daß immer noch die Bedingung (31) erfüllt ist. Die so definierte Funktion sei bezeichnet als Nullfunktion $N(x, t)$ (bei Sommerfeld „Zackenfunktion"). Es ist also

$$\text{(32)} \qquad \int_0^1 N(x, t)dx = 1$$

und infolgedessen

$$\text{(33)} \qquad \int_0^1 N(t, x) \cdot f(t)\,dt = f(x).$$

Das Problem (IV, II) wird jetzt gelöst für den folgenden speziellen Fall: es soll eine Funktion $v(\lambda; x, t)$ gefunden werden, die der Gleichung genügt:

$$\text{(34)} \qquad \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{c(x)} \cdot \frac{dv}{dx}\right] - [\lambda^2 L(x) + \lambda w(x)]v(\lambda; x, t) = N(t, x)$$

und die Randbedingungen (II) erfüllt. Gelingt es nämlich, eine solche, für alle x und t endliche Lösung zu finden, so ist damit auch das

1) Hierzu und zu dem Folgenden vgl. Sommerfeld l. c.

Problem (IV, II) gelöst. Aus (33) folgt nämlich durch bloßes Einsetzen von (34) die Gleichung:

$$\int_0^1 \left[\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{c(x)}\cdot\frac{dv}{dx}\right) - (\lambda^2 L(x) + \lambda w(x)\cdot v\right]\cdot f(t)dt = f(x)$$

oder

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{c(x)}\cdot\frac{d}{dx}\int_0^1 v(\lambda;\ x,\ t)f(t)dt\right] - [\lambda^2 L(x) + \lambda w(x)]\cdot\int_0^1 v(\lambda;\ x,\ t)f(t)dt = f(x).$$

Vergleicht man damit die Gleichung (IV), so sieht man, daß zwischen $y(x)$ und $f(x)$ die Beziehung besteht:

$$y(x) = \int_0^1 v(\lambda;\ x,\ t)\cdot f(t)dt. \tag{35}$$

Aus (34) folgt weiter durch Integration:

$$\frac{1}{c(x)}\cdot\frac{dv}{dx}\Big|_{t-0}^{t+0} = \int_{t-0}^{t+0} N(t,\ x)dx + \int_{t-0}^{t+0}[\lambda^2 L(x) + \lambda w(x)]v\cdot dx.$$

Das zweite Integral auf der rechten Seite verschwindet wegen der vorausgesetzten Endlichkeit von $v(\lambda;\ x,\ t)$, das erste hat den Wert Eins, und man bemerkt jetzt, daß die Funktion $v(\lambda;\ x,\ t)$ im wesentlichen nichts anderes ist, als die Greensche Funktion des Differentialausdrucks $D(y)$ bei den Randbedingungen (II); denn sie genügt überall, mit Ausnahme der Stelle $x = t$ der Differentialgleichung:

$$D(v) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{c}\frac{dv}{dx}\right) - (\lambda^2 L + \lambda w)\cdot v = 0, \tag{36}$$

verschwindet am Rand, und ihr erster Differentialquotient hat an der Stelle $x = t$, abgesehen vom Faktor $c(t)$, den Einheitssprung:

$$\frac{1}{c(t)}\left|\frac{dv}{dx}\right|_{t-0}^{t+0} = 1. \tag{37}$$

Als Lösung setzt man an:

$$v(\lambda; x, t) = c_1\cdot u(\lambda; 0, x), \quad x \leqq t$$
$$v(\lambda; x, t) = c_2\cdot u(\lambda; 1, x), \quad x \geqq t$$

und erhält zur Bestimmung der von x unabhängigen Konstanten c_1 und c_2 die beiden linearen Gleichungen:

$$c_1\cdot u(\lambda; 0, t) - c_2\cdot u(\lambda; 1, t) = 0$$
$$c_1\cdot u'(\lambda; 0, t) - c_2\cdot u'(\lambda; 1, t) = -c(t),$$

wo die Striche wie immer die Ableitungen nach x (an der Stelle $x = t$) bedeuten. Für c_1 und c_2 ergeben sich daraus die Werte:

$$c_1 = \frac{c(t) \cdot u(\lambda; 1, t)}{u(\lambda; 0, t) \cdot u'(\lambda; 1, t) - u'(\lambda; 0, t) \cdot u(\lambda; 1, t)}$$

$$c_2 = \frac{c(t) \cdot u(\lambda; 0, t)}{u(\lambda; 0, t) \cdot u'(\lambda; 1, t) - u'(\lambda; 0, t) \cdot u(\lambda; 1, t)}.$$

Es läßt sich zeigen, daß die im Nenner stehende Determinante den Wert $c(t) \cdot u(\lambda; 0, 1)$ hat. Aus den beiden Gleichungen:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{c}\frac{du(\lambda; 0, x)}{dx}\right) = (\lambda^2 L + \lambda w) u(\lambda; 0, x)$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{c}\frac{du(\lambda; 1, x)}{dx}\right) = (\lambda^2 L + \lambda w) u(\lambda; 1, x)$$

folgt nämlich ohne weiteres:

$$\frac{1}{c(x)}\left[u(\lambda; 0, x) \cdot u'(\lambda; 1, x) - u'(\lambda; 0, x)\, u(\lambda; 1, x\right] = \text{const.}$$

Setzt man also für x den Wert t, dann den Wert 1 ein, so ergibt sich:

$$\frac{1}{c(t)}\left[u(\lambda; 0, t)\, u'(\lambda; 1, t) - u'(\lambda; 0, t)\, u(\lambda; 1, t)\right] = u(0, 1),$$

und die Konstanten c_1 und c_2 sind also gegeben durch die beiden Formeln:

$$c_1 = \frac{u(\lambda; 1, t)}{u(\lambda; 0, 1)}, \quad c_2 = \frac{u(\lambda; 0, t)}{u(\lambda; 0, 1)},$$

so daß die Greensche Funktion $v(\lambda; x, t)$ die Form annimmt:

$$(38) \quad \begin{cases} v(\lambda; x, t) = \dfrac{u(\lambda; 0, x)\, u(\lambda; 1, t)}{u(\lambda; 0, 1)}, & x \leqq t \\ v(\lambda; x, t) = \dfrac{u(\lambda; 0, t) \cdot u(\lambda; 1, x)}{u(\lambda; 0, 1)}, & x \geqq t. \end{cases}$$

Die Funktion $v(\lambda; x, t)$ ist symmetrisch in x und t. Ihre Pole sind nichts anderes als die Eigenwerte des Problems (I, II). Aus den Ergebnissen von Nr. 4 folgt, daß $v(\lambda; x, t)$ nur einfache Pole haben kann.

Mit Hilfe der Gleichung (35) läßt sich jetzt noch eine direkte Beziehung zwischen den Eigenfunktionen des Problems (I, II) und der oben definierten Greenschen Funktion $v(\lambda; x, t)$ des Differentialausdrucks $D(y)$ ableiten. Es sei $u(\lambda_i; 0, x)$ eine Eigenfunktion, dann genügt sie der Gleichung:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{c(x)} \cdot \frac{du(\lambda_i; 0, x)}{dx}\right] = \left[\lambda_i^2 L + \lambda_i \cdot w\right] u(\lambda_i; 0, x),$$

aus der durch Subtraktion derselben Größe auf beiden Seiten die Gleichung entsteht:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{c}\frac{du(\lambda_i; 0, x)}{dx}\right) - (\lambda^2 L + \lambda w) u(\lambda_i; 0, x) = (\lambda_i^2 L + \lambda_i w - \lambda^2 L - \lambda w) u(\lambda_i; 0, x),$$

so daß aus (35) die Formel entsteht:

$$u(\lambda_i; 0, x) = \int_0^1 v(\lambda; x, t)\,[(\lambda_i^2 - \lambda^2)L(t) + (\lambda_i - \lambda)w(t)]u(\lambda_i; 0, t)\,dt$$

oder:

$$(39)\quad u(\lambda_i; 0, x) = (\lambda_i - \lambda)\int_0^1 v(\lambda; x, t)[(\lambda_i + \lambda)\,L(t) + w(t)]u(\lambda_i; 0, t)\,dt.$$

Das ist die gesuchte Beziehung.

8. **Das asymptotische Verhalten der Funktion $v(\lambda; x, t)$.** In Analogie mit dem Ausdruck (38) für die Funktion $v(\lambda; x, t)$ definiert man jetzt eine Funktion $V(\lambda; x, t)$ durch die Formeln:

$$(40)\quad \begin{cases} V(\lambda; x, t) = \dfrac{U(\lambda; 0, x)\cdot U(\lambda; 1, t)}{U(\lambda; 0, 1)}, & x \leq t \\ V(\lambda; x, t) = \dfrac{U(\lambda; 0, t)\cdot (U(\lambda; 1, x)}{U(\lambda; 0, 1)}, & x \geqq t \end{cases}$$

wo die Funktion $U(\lambda; 0, x)$ gegeben ist durch (24). Die Funktion $U(\lambda; 1, x)$ ist ganz analog zu bilden. Sie ist ebenfalls eine asymptotische Lösung von (1) unter Voraussetzung der Bedingungen (26), verschwindet bei $x = 1$ und hat dort die Ableitung $c(1)$. Aus (24) folgt leicht, daß $U(\lambda; 1, x)$ gegeben ist durch den Ausdruck:

$$(41)\quad U(\lambda; 1, x) = \frac{E_7}{\lambda}\,[Z_4(x) - Z_4^{-1}(x)],$$

wo $Z_4(x)$ eine Abkürzung ist für:

$$(42)\quad Z_4(x) = Z_3(x)\cdot e^{\frac{1}{2}\int_1^x w(t)\sqrt{\frac{c(t)}{L(t)}}\,dt}, \quad Z_4^{-1}(x) = \frac{1}{Z_4(x)}$$

und

$$(43)\quad Z_3(x) = e^{\lambda\int_1^x \sqrt{L(t)\,c(t)}\,dt}.$$

E_7 folgt aus (24′) durch Vertauschen von 0 mit 1. Der Nenner $U(\lambda; 0, 1)$ des Bruches auf der rechten Seite von (40) folgt aus $U(\lambda; 0, x)$[1]), indem man $x = 1$ setzt.

Setzt man in (40) die durch (24) und (41) gegebenen Werte für $U(\lambda; 0, x)$ und $U(\lambda; 1, x)$ ein, so erhält man, zunächst für $x \leqq t$:

$$(44)\quad V(\lambda; x, t) = \frac{E_8}{\lambda}\cdot\frac{[Z_2(x) - Z_2^{-1}(x)]\cdot[Z_4(t) - Z_4^{-1}(t)]}{[Z_2(1) - Z_2^{-1}(1)]}.$$

1) Während aus (3) und (5) folgt, daß $u(\lambda; s, x) = -u(\lambda; x, s)$ ist, gilt dasselbe nur asymptotisch für $U(\lambda; s, x)$, das analog zu definieren ist wie $U(\lambda; 0, x)$. Demnach darf man $U(\lambda; 0, 1)$ nicht ersetzen durch $-U(\lambda; 1, 0)$, das ist aber unwesentlich.

Es sei λ ein Punkt außerhalb einer beliebig kleinen Umgebung der Nullstellen von $U(\lambda; 0, 1)$. Multipliziert man den Zähler in (44) aus, so erhält man lauter Exponentialfunktionen von der folgenden Form:

$$e^{\pm\left[\int_{\blacksquare}^{x}\left(\frac{w}{2}\sqrt{\frac{c}{L}}+\lambda\sqrt{L\cdot c}\right)dx\pm\int_{1}^{t}\left(\frac{w}{2}\sqrt{\frac{c}{L}}+\lambda\sqrt{L\cdot c}\right)dx\right]}. \tag{44'}$$

Ist der reelle Bestandteil von λ zunächst positiv, so kürze man den Bruch in (44) durch $Z_2(1)$ und erhält im Zähler eine Summe von Exponentialfunktionen, deren Exponenten die Form haben:

$$\begin{cases}\pm\left[\int_{0}^{x}\left(\frac{w}{2}\sqrt{\frac{c}{L}}+\lambda\sqrt{L\cdot c}\right)dx\pm\int_{1}^{t}\left(\frac{w}{2}\sqrt{\frac{c}{L}}+\lambda\sqrt{L\cdot c}\right)dx\right]\\ \qquad\qquad -\int_{0}^{1}\left(\frac{w}{2}\sqrt{\frac{c}{L}}+\lambda\sqrt{L\cdot c}\right)dx.\end{cases} \tag{44''}$$

Auf Grund der Bedingungen (III) besteht weiter die Ungleichung ($x \leqq t$):

$$\left|\int_{0}^{x}\sqrt{L\cdot c}\,dx\pm\int_{1}^{t}\sqrt{L\cdot c}\,dx\right| \leqq \int_{\blacksquare}^{1}\sqrt{L\cdot c}\cdot dx. \tag{45}$$

Daraus leitet man ohne weiteres die Tatsache ab, daß sämtliche, durch (44″) gegebenen Ausdrücke die Form haben $a - b\cdot\lambda$, wo a und b endliche Funktionen von x und t bedeuten, und b insbesondere nirgends negativ ist. Da der reelle Bestandteil von λ als positiv vorausgesetzt wurde, ergibt sich, daß der Zähler in (44) seinem Absolutwert nach endlich ist, auch wenn $|\lambda|$ über alle Grenzen wächst, und ohne daß α einer Endlichkeitsbedingung unterworfen wäre.

Ist der reelle Bestandteil von λ negativ, so kürze man den Bruch in (44) durch $Z_2^{-1}(1)$ und erhält genau dasselbe Ergebnis. Der Nenner des Bruches ist in beiden Fällen (nach dem Kürzen) endlich und von Null verschieden.[1])

Stellt λ_k' für k von $-\infty$ bis $+\infty$ sämtliche Nullstellen von $U(\lambda; 0, 1)$ dar, so läßt sich das Ergebnis in dem folgenden Satz formulieren:

Zu jeder beliebig kleinen Zahl ε lassen sich zwei Zahlen H_1 und E_9 so finden, daß für alle Werte von λ, für die die Ungleichungen bestehen:

$$|\lambda| > H_1, \quad |\lambda - \lambda_k'| > \varepsilon \tag{46}$$

1) Dasselbe Ergebnis erhält man für den Fall $x \geqq t$.

die durch (40) definierte Funktion $V(\lambda; x, t)$ der Ungleichung genügt:

$$|V(\lambda; x, t)| < \frac{E_9}{|\lambda|}. \qquad \begin{matrix} 0 \leqq x \leqq 1 \\ 0 \leqq t \leqq 1 \end{matrix} \tag{47}$$

Da die Nullstellen von $U(\lambda; 0, 1)$ asymptotisch übereinstimmen mit den Eigenwerten von (I, II), so läßt sich die zweite Bedingung (46) auch so formulieren, daß λ außerhalb einer beliebig kleinen Umgebung der Eigenwerte liegen muß.

In bezug auf die Funktion $V(\lambda; x, t)$ läßt sich jetzt der folgende wichtige Satz beweisen:

Zu jeder beliebigen Zahl E_{10} läßt sich eine Zahl H_2 so finden, daß für alle Werte des Parameters λ, für welche die Bedingung besteht:

$$|\lambda| > H_2 \tag{48}$$

die beiden durch (40) und (38) definierten Funktionen $V(\lambda; x, t)$ und $v(\lambda; x, t)$ der Ungleichung genügen:

$$|V(\lambda; x, t) - v(\lambda; x, t)| < \frac{|E_{10}|}{|\lambda|}, \qquad \begin{matrix} 0 \leqq x \leqq \\ 0 \leqq t \leqq \end{matrix} \tag{49}$$

Der Satz ist jedenfalls dann bewiesen, wenn gezeigt werden kann, daß $V(\lambda; x, t)$ asymptotisch der Differentialgleichung (34) genügt und die Randbedingungen (II) erfüllt. Es muß also gezeigt werden, daß $V(\lambda; x, t)$ der Gleichung:

$$D(V) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{c}\frac{dV}{dx}\right) - (\lambda^2 L + \lambda w)V = 0, \quad x \neq t \tag{36'}$$

asymptotisch genügt und an der Stelle $x = t$ ebenfalls asymptotisch den Sprung $c(t)$ im ersten Differentialquotienten besitzt. Daß sie die Randbedingungen (II) erfüllt, ist aus der Formel (40) direkt abzulesen. Für $x < t$ folgt aus der Formel (40):

$$D(V) = \frac{U(\lambda; 1, t)}{U(\lambda; 0, 1)} \cdot D(U(\lambda; 0, x)),$$

also aus (18″), (24″) und (41):

$$D(V) = \frac{E_{11}}{\lambda} \cdot \frac{[Z_4(t) - Z_4^{-1}(t)] \cdot [E_2 \cdot Z_1(x) + E_3 \cdot Z_1^{-1}(x)]}{Z_2(1) - Z_2^{-1}(1)}. \tag{50}$$

Auf Grund derselben Betrachtungen, die schon oben für das asymptotische Verhalten von $V(\lambda; x, t)$ angestellt worden waren und die im wesentlichen auf der Ungleichung (45) beruhten, folgt auch hier, daß $V(\lambda; x, t)$ tatsächlich die Differentialgleichung (36′) asymptotisch befriedigt.[1])

1) Für $x > t$ ist der Beweis analog zu führen.

Jetzt ist noch der Nachweis zu führen, daß $V(\lambda; x, t)$ an der Stelle $x = t$ asymptotisch den Sprung $c(t)$ im ersten Differentialquotienten besitzt. Man leitet aus (40) ohne weiteres die Gleichung ab:

$$(51)\quad V'(\lambda; t+0, t) - V'(\lambda; t-0, t) = \frac{U(\lambda;0,t)\cdot U'(\lambda;1,t) - U'(\lambda;0,t)\cdot U(\lambda;1,t)}{U(\lambda;0,1)},$$

wo die Striche wieder die inbezug auf x vor dem Grenzübergang zu $x = t$ gebildeten Ableitungen bedeuten. In Analogie mit (18″) hat man nun die beiden Gleichungen:

$$(18'')\qquad D(U(\lambda; 0, x)) = \frac{E_2}{\lambda}\cdot Z_1(x) + \frac{E_3}{\lambda} Z_1^{-1}(x)$$

$$(18''')\qquad D(U(\lambda; 1, x)) = \frac{E_{12}}{\lambda}\cdot Z_3(x) + \frac{E_{13}}{\lambda} Z_3^{-1}(x),$$

woraus man ohne weiteres mit Zuhilfenahme von (24) und (41) die Formel ableitet (vgl. Nr. 7):

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{c(x)}\left(U(\lambda; 0, x)\cdot U'(\lambda; 1, x) - U'(\lambda; 0, x)\cdot U(\lambda; 1, x)\right)\right] \\ \quad = \frac{E_1}{\lambda}\left[Z_2(x) - Z_2^{-1}(x)\right]\cdot\left[\frac{E_{12}}{\lambda} Z_3(x) + \frac{E_{13}}{\lambda}\cdot Z_3^{-1}(x)\right] \\ \quad - \frac{E_7}{\lambda}\left[\frac{E_2}{\lambda} Z_1(x) + \frac{E_3}{\lambda} Z_1^{-1}(x)\right]\left[Z_4(x) - Z_4^{-1}(x)\right]. \end{cases}$$

Dividiert man beide Seiten durch $U(\lambda; 0, 1)$, so erhält man auch hier wieder unter Berücksichtigung der Beziehung (45), wenn nur $|\lambda|$ hinreichend groß ist[1]),

$$\left|\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{c(x)}\cdot\frac{U(\lambda; 0, x)\,U'(\lambda; 1, x) - U'(\lambda; 0, x)\,U(\lambda; 1, x)}{U(\lambda; 0, 1)}\right]\right| < \frac{|E_{14}|}{\lambda},$$

woraus durch Integration folgt:

$$\frac{1}{c(x)}\cdot\frac{U(\lambda; 0, x)\cdot U'(\lambda; 1, x) - U'(\lambda; 0, x)\,U(\lambda; 1, x)}{U(\lambda; 0, 1)} = \text{const.} + \frac{E_{15}}{\lambda},$$

und wenn man $x = 1$ setzt:

$$\frac{1}{c(x)}\cdot\frac{U(\lambda; 0, x)\cdot U'(\lambda; 1, x) - U'(\lambda; 0, x)\,U(\lambda; 1, x)}{U(\lambda; 0, 1)} = 1 + \frac{E_{16}}{\lambda}.$$

Aus (51) ergibt sich also die Gleichung:

$$(52)\qquad V'(\lambda; t+0, t) - V'(\lambda; t-0, t) = c(t) + \frac{E_{17}}{\lambda}.$$

Damit ist tatsächlich der Nachweis geführt, daß die Funktion $V(\lambda; x, t)$ asymptotisch mit $v(\lambda; x, t)$ übereinstimmt; denn auch wenn λ bei hinreichend großen Absolutwerten sich einem Eigenwert von (I, II) unbegrenzt nähert, verhalten sich die beiden Funktionen in gleicher Weise, indem beide über alle Grenzen wachsen.

1) Vgl. den Wortlaut des zu beweisenden Hauptsatzes.

Aus der Vereinigung der beiden soeben bewiesenen Sätze über die Funktionen $V(\lambda; x, t)$ und $v(\lambda; x, t)$ folgt weiter der Satz:

Zu jeder beliebig kleinen Zahl ε kann man immer zwei Zahlen H_3 und E_{18} so finden, daß für alle Werte des Parameters λ, für welche

$$|\lambda| > H_3, \quad |\lambda - \lambda_k| > \varepsilon \tag{53}$$

ist, die Greensche Funktion $v(\lambda; x, t)$ der Ungleichung genügt:

$$|v(\lambda; x, t)| < \frac{E_{18}}{\lambda}. \qquad \begin{matrix} 0 \leqq x \leqq 1 \\ 0 \leqq t \leqq 1 \end{matrix} \tag{54}$$

9. Die Partialbruchzerlegung der Funktion $v(\lambda; x, t)$. In der komplexen λ-Ebene denke man sich jetzt Quadrate $Q_k (k = 0, 1, 2, \ldots)$ mit dem Nullpunkt als Mittelpunkt so gezeichnet, daß Q_k die Seitenlänge $\frac{(2k+1)\cdot\pi}{\int_0^1 \sqrt{L(t)\cdot c(t)}\, dt}$ hat. Aus Nr. 6 ergibt sich dann, daß von einem bestimmten n ab die Seiten aller Quadrate Q_n, Q_{n+1} usw. keinen Punkt der Umgebung eines Eigenwerts von (I, II) enthalten. Für die Punkte sämtlicher Quadrate Q_n, Q_{n+1} usw. gilt dann bei Bestehen von (53) die Ungleichung (54). Es sei jetzt λ_0 ein Punkt, der nicht in der unmittelbaren Umgebung eines Eigenwerts liegt, und es sei $R(\lambda_i)$ das Residuum der Funktion $v(\lambda; x, t)$ im Punkte $\lambda = \lambda_i$, wo λ_i ein Eigenwert ist. Dann gibt der Satz von Cauchy:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{Q_{n+k}} \frac{v(\lambda; x, t)}{(\lambda - \lambda_0)}\, d\lambda = v(\lambda_0; x, t) + \sum_i \frac{R(\lambda_i)}{\lambda_i - \lambda_0}. \tag{55}$$

Die Summe ist zu erstrecken über sämtliche Eigenwerte λ_i innerhalb Q_{n+k}. Vermöge der Ungleichung (54) konvergiert die linke Seite von (55) mit wachsendem k gleichmäßig gegen Null, und es bleibt:

$$v(\lambda_0; x, t) = \sum_i \frac{R(\lambda_i)}{\lambda_0 - \lambda_i}, \tag{56}$$

wo die Summe zu erstrecken ist über sämtliche Eigenwerte von (I, II). Zur Berechnung von $R(\lambda_i)$ benutzt man die Definitionsgleichung für das Residuum:

$$v(\lambda; x, t) = \frac{R(\lambda_i)}{\lambda - \lambda_i} + E(\lambda; x, t), \tag{57}$$

wo $E(\lambda; x, t)$ im Punkt $\lambda = \lambda_i$ endlich ist. Es ist weiter:

$$R(\lambda_i) = \int_{\circ} v(\lambda; x, t)\, d\lambda,$$

und mit Zuhilfenahme von (38) folgt $(x \leqq t)$:

$$R(\lambda_i) = c_i \cdot u(\lambda_i; 0, x) \cdot u(\lambda_i; 1, t), \tag{58}$$

also aus (57):

$$(\lambda - \lambda_i) \cdot v(\lambda; x, t) - c_i u(\lambda_i; 0, x) \cdot u(\lambda_i; 1, t) = (\lambda - \lambda_i) E(\lambda; x, t).$$

Durch Multiplikation mit

$$[(\lambda + \lambda_i) L(t) + w(t)] \cdot u(\lambda_i; 0, t)$$

und Integration über t von 0 bis 1 erhält man:

$$\lim_{\lambda = \lambda_i} \left[(\lambda - \lambda_i) \int_0^1 v(\lambda; x, t)[(\lambda + \lambda_i) L(t) + w(t)] u(\lambda_i; 0, t)\, dt \right.$$
$$\left. - c_i \cdot u(\lambda_i; 0, x) \int_0^1 u(\lambda_i; 0, t) \cdot u(\lambda_i; 1, t)[(\lambda + \lambda_i) L(t) + w(t)]\, dt \right] = 0.$$

Unter Berücksichtigung der Formel (39) ergibt sich weiter:

$$\lim_{\lambda = \lambda_i} \left[-u(\lambda_i; 0, x) - c_i u(\lambda_i; 0, x) \int_0^1 u(\lambda_i; 0, t) \cdot u(\lambda_i; 1, t)[(\lambda + \lambda_i) L(t) + w(t)]\, dt \right] = 0.$$

Der Koeffizient c_i ist demnach gegeben durch die Formel:

$$c_i = \frac{-1}{\int_0^1 u(\lambda_i; 0, t) \cdot u(\lambda_i; 1, t)[2\lambda_i \cdot L(t) + w(t)]\, dt}.$$

Beachtet man, daß $u(\lambda_i; 0, x)$ ebenso wie $u(\lambda_i; x, 1)$ die zum Eigenwert λ_i gehörige Eigenfunktion $y_i(x)$ von (I, II) ist, so kann man schreiben:

$$c_i = \frac{1}{\int_0^1 y_i^2(t) \cdot [2\lambda_i L(t) + w(t)]\, dt}.$$

Setzt man zur Abkürzung:

$$\int_0^1 y_i^2(t) \cdot [2\lambda_i \cdot L(t) + w(t)]\, dt = N_i, \tag{59}$$

so ergibt sich (zunächst für $x \leqq t$) aus (56) und (58):

$$v(\lambda_0; x, t) = \sum_i \frac{y_i(x) \cdot y_i(t)}{N_i(\lambda_i - \lambda_0)}, \tag{60}$$

wo die Summe zu erstrecken ist über alle Eigenwerte und Eigenfunktionen von (I, II). Für $x \geqq t$ ergibt sich naturgemäß dieselbe Formel. Die auf der rechten Seite von (60) stehende Summe konvergiert gleichmäßig für alle x und t des Grundintervalls. Die Formel (60) ist die gesuchte Partialbruchzerlegung der Greenschen Funktion $v(\lambda; x, t)$.

10. Die Entwicklung willkürlicher Funktionen nach den Eigenfunktionen. Es seien $F(x)$ eine zweimal differenzierbare Funktion, $c(x)$,

$L(x)$ und $w(x)$ beliebige, den Bedingungen (III) unterworfene Funktionen von x. Man bilde den Differentialausdruck

$$D(F) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{c}\frac{dF}{dx}\right) - (\lambda_0^2 L + \lambda_0 w)\cdot F \tag{61}$$

und setze ihn gleich $f(x)$. Dann besteht nach (35) zwischen $F(x)$ und $f(x)$ die Beziehung:

$$F(x) = \int_0^1 v(\lambda_0; x, t)\cdot f(t)\,dt, \tag{62}$$

wo $v(\lambda; x, t)$ die früher definierte Greensche Funktion des Differentialausdrucks $D(F)$ bei den Randbedingungen (II) ist.

Unter Berücksichtigung der Formel (60) kann man dann $F(x)$ in eine Reihe nach den Eigenfunktionen des Randwertproblems (I, II) entwickeln, indem man (60) einfach in (62) einsetzt:

$$F(x) = \sum_i k_i \cdot y_i(x), \tag{63}$$

wo k_i gegeben ist durch:

$$k_i = \frac{1}{N_i(\lambda_i - \lambda_0)}\cdot\int_0^1 f(t)\cdot y_i(t)\,dt. \tag{64}$$

Die Summe ist zu erstrecken über alle Eigenwerte und Eigenfunktionen von (I, II). Die Reihe konvergiert gleichmäßig für alle Werte von x, für die $0 \leqq x \leqq 1$ ist.

Damit ist das fundamentale Problem der Entwickelbarkeit willkürlicher Funktionen auch für die Theorie der gedämpften Schwingungen gelöst. Zugleich ist gezeigt, daß die Bedingung der zweimaligen Differenzierbarkeit der die Anfangsverteilung der Stromstärke darstellenden Funktion zur Lösbarkeit des Problems vollkommen hinreichend ist.

Man kann also ganz allgemein sagen, daß alle bekannten Gesetze der harmonischen Schwingungen sich mit entsprechender Abänderung bei den gedämpften Schwingungen wiederfinden. Sobald die Funktion $w(x)$ durchweg größer als Null ist, sind sämtliche Eigenschwingungen mehr oder weniger stark gedämpft. Es existieren unendlich viele, durch die imaginären Bestandteile der Eigenwerte gegebenen Schwingungszahlen, die von einer bestimmten endlichen Grenze ab wachsen wie die ganzen Zahlen (vgl. Formel (30)). Zu jeder Frequenz existiert eine und nur eine Schwingungsform (Eigenfunktion). Von einer bestimmten endlichen Schwingungszahl ab sind alle Eigenschwingungen, die zu höheren Frequenzen gehören, bis auf beliebig kleine Unterschiede gleich stark gedämpft.

Lebenslauf.

Ich wurde geboren am 6. Oktober 1891 zu Ostheim, Kreis Rappoltsweiler, als Sohn des Holzschuhmachermeisters Johann Faber. Meine Schulbildung erhielt ich auf der Realschule in Barr und später auf der Oberrealschule in Colmar, Elsaß. Seit Oktober 1909 studierte ich in Straßburg Mathematik und Physik unter der Leitung der Herren Braun, Cohn, v. Mises, Schur, Weber und Wellstein.

Herrn v. Mises bin ich für seine freundliche Unterstützung bei Anfertigung der vorliegenden Arbeit zu besonderem Dank verpflichtet.